1 Motivierende Beispiele

1.1 Globales Minimum einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{35} \cdot x\right) + \frac{y}{3} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{35} \cdot y\right) + 2$$

2 Grundbegriffe der biologischen Evolution

2.1 Genotyp, Phänotyp, Individuum, Population und Evolution

2.2 Evolutionäre Operatoren

- **Rekombination**: Erzeugen neuer Individuen
- **Mutation**: Verändern von Individuen
- **Selektion**: Auswahl von Individuen

3 Formalisierung der Grundbegriffe

3.1 Allgemeines Optimierungsproblem

3.2 Grundbegriffe der biologischen Evolution formal definiert

Definition *Binäre Operatoren*
Seien i und j Bit-Strings der Länge l. Dann sei

1. $i \oplus j$ das *logische exklusive oder* von i und j,
2. $i \otimes j$ das *logische und* aus i und j,
3. $H(i, j) := |i \oplus j|$ der *Hamming-Abstand* von i und j, also die Anzahl an unterschiedlichen Bitpositionen.

3.3 Formale Definition der Evolutionsoperatoren mit Beispielen

Definition *Evolutionäre Operatoren*

1. Ein Mutationsoperator ist eine Abbildung
$$M : \mathcal{P}(\mathbb{P}) \to \mathcal{P}(\mathbb{P}), P \mapsto P', \qquad \text{mit } |P| = |P'|.$$
2. Ein Rekombinationsoperator mit e Eltern und k Kindern ist eine Abbildung
$$R^{e,k} : \mathcal{P}(\mathbb{P}) \to \mathcal{P}(\mathbb{P}), E \mapsto K \supset E, \qquad \text{mit } |E| = e, e + k = |K|.$$
3. Ein *Selektionsoperator* ist eine Abbildung
$$S^{e,k} : \mathcal{P}(\mathbb{P}) \to \mathcal{P}(\mathbb{P}), E \mapsto K \subset E, \qquad \text{mit } |E| = e > k = |K|.$$

3.4 Evolutionärer Algorithmus

Algorithmus *Evolutionärer Algorithmus*

```
Eingabe: Zielfunktion f, Populationsgroesse m, Zahl der Kinder l
Erzeuge Population P der Groesse m
Berechne f(i) fuer alle i in P
Wiederhole
   Generiere l Kinder durch Anwenden des Rekombinationsoperators auf P
   Speichere Kinder und Eltern in P'
   Wende Mutationsoperator auf P' an
   Waehle mit Selektionsoperator aus P' m aus und speichere sie in P
bis Abbruchkriterien erfuellt
Ausgabe: P
```

4 Modellierung mit Markov-Ketten

4.1 Grundlagen der Stochastik

Definition *Zufallsvariable*
Sei $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ein messbarer Raum. Eine $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$-messbare Funktion $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt Zufallsvariable.

Definition und Satz
Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen in $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Folge (X_n) konvergiert gegen X

- *total* ($X_n \xrightarrow{c} X$), wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega \in \Omega \mid |X_i(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) < \infty.$$

- *fast sicher* ($X_n \xrightarrow{f.s.} X$), wenn

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

- *in Wahrscheinlichkeit* ($X_n \xrightarrow{p} X$), wenn für jedes $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

Ist X eine Zufallsvariable und (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen in $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so gilt:

$$X_n \xrightarrow{c} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{f.s.} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{p} X.$$

4.2 Definition stochastischer Prozess & Markov-Kette

Definition *Stochastischer Prozess*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum. Eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (E, \mathcal{E})$ heißt *stochastischer Prozess* mit *Zustandsraum* E.

Definition *Markov-Kette*

- Ein stochastischer Prozess X_n mit Zustandsraum E heißt Markov-Kette, wenn für alle $n \geq 0$ und alle $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$ gilt

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n).$$

- Eine Markov-Kette heißt *homogen*, wenn für alle $i, j \in E$

$$P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) =: p_{ij},$$

  unabhängig von n ist.

- Die durch p_{ij} definierte Matrix $\Pi \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ heißt *Übergangsmatrix* der Markov-Kette. Π ist eine stochastische Matrix, d.h.

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in |E| \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{|E|} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in |E|.$$

4.3 Exemplarische Modellierung eines Genetischen Algorithmus als Markov-Kette

5 Konvergenzanalyse des Markov-Modells

5.1 Hinreichende Konvergenzbedingungen

Satz *Hinreichende Konvergenzbedingung*
Ein Genetischer Algorithmus über einem endlichen Suchraum Ω, mit elitärem Selektionsoperator und dessen evolutionäre Operatoren sicherstellen, dass von jedem Individuum aus ein optimaler Zustand erreichbar ist, konvergiert unabhängig von der Startpopulation total, fast sicher und in Wahrscheinlichkeit gegen eine Optimallösung.

5.2 Notwendige Konvergenzbedingungen

Satz *Notwendige Konvergenzbedingungen*
Notwendig für eine von der Startpopulation unabhängige Konvergenz eines Genetischen Algorithmus über einem endlichen Suchraum gegen ein Optimum ist ein elitärer Selektionsoperator sowie Evolutionsoperatoren, die für einen Übergang von jedem Individuum zu jedem Anderen sorgen.

6 No-Free-Lunch-Theorem

7 Literatur

Literatur

[1] Rafael Fink, *Evolutionäre Algorithmen: Analyse und Anwendung auf das Travelling Salesman Problem* (2004).

[2] Karsten Weicker, *Evolutionäre Algorithmen*, Teubner Verlag, 2002.

[3] Volker Nissen, *Einführung in Evolutionäre Algorithmen: Optimierung nach dem Vorbild der Evolution*, Vieweg Verlag, 1997.

[4] Thomas Bäck, David B. Fogel, and Zbigniew Michalewicz, *Evolutionary Computation 1: Basic Algorithms and Operators*, Institute of Physics Publishing, 2000.

[5] Hans-Otto Georgii, *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, de Gruyter, 2002.